**Chapitre 5 – Isométries en dimension 2 et 3**

Dans tout le chapitre, désigne un espace préhilbertien de dimension .

On rappelle que si est une famille de vecteurs de et est une base de , alors

où ,

Si est une autre base de si on note, et

Alors .

Donc

1. **Espaces euclidiens orientés**

On se fixe une b.o.n de .

Pour toute base orthonormée de , on sait que

Ainsi

Ainsi l’ensemble des bases orthonormées de peut donc s’écrire comme l’union disjointe :

On dit que a la même orientation que si .

On dit que inverse l’orientation de si .

La base est appelée base de référence pour l’orientation de .

Orienter l’espace euclidien consiste à choisir une b.o.n de de référence et adopter le vocabulaire suivant :

Définition : Soit un espace euclidien orienté par une base orthonormée . Soit une b.o.n de , on dit que la base est directe si et indirecte si

Remarque :

1. est une base directe puisque
2. L’ordre des éléments de la base orthonormée est important
3. À partir d’une b.o.n indirecte de , on peut toujours construire une b.o.n directe de en multipliant l’un des vecteurs par .

Produit mixte

Soit un espace euclidien orienté de dimension .

Propriété : Soit une famille de vecteurs de . Alors le déterminant est le même dans n’importe quelle b.o.n directe de . On le nomme le produit mixte de la famille et on le note b.o.n directe de .

Remarque :

Par propriétés des déterminants, on a :

la famille est liée

1. **Classification des isométries en dimension 2**

Dans toute cette partie, désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

**Rotation du plan orienté**

Théorème : Une isométrie directe du plan orienté a la même matrice dans n’importe quelle base orthonormée directe de . Plus précisément, il existe un réel , unique modulo , tel que b.o.n directe de ,

On dit alors que est la rotation d’angle et on la note

Remarque : comprendre l’unicité modulo comme suit, si tel que alors

Définition : Soient non nuls. Il existe une unique rotation qui envoie sur . On appelle alors mesure de l’angle orienté de à le réel unique à près tel que et on note  .

Si de plus, on dit que est la mesure principale de l’angle orienté de à .

Proposition : pour tous

Proposition : Soient . Notons . Alors

Où désigne le produit mixte de et . (on a pour toute base orthonormée directe de .

Démonstration ⍟

Comme est de norme 1, on peut connaître une b.o.n directe de . Alors comme

et

Or

Alors

Théorème : Soient une isométrie indirecte du plan (ie avec ) et une base orthonormée de . Alors il existe tel que

Et correspond à la réflexion par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur

Théorème : Les endomorphismes orthogonaux directs du plan orienté sont les rotations vectorielles. Celles-ci commutent entre elles et ont même représentation matricielle dans toute base orthonormée directe de . Les endomorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions.

Corollaire : Dans le plan, la composée de deux rotations est une rotation, la composée de deux réflexions est une rotation, et la composée d’une rotation et d’une réflexion est une réflexion.

**Classification des isométries en dimension 3**

Théorème : Soit une isométrie directe de . Alors est nécessairement valeur propre de , et si l’on prend unitaire, il existe un unique réel à près, tel que pour toute base orthonormée directe de premier vecteur ,

On dit alors que est la rotation d’axe dirigé et orienté par et d’angle orienté par . On la notera

Théorème : Soit une isométrie indirecte de . Alors est nécessairement valeur propre de , et si l’on prend unitaire, il existe un unique réel , à près, tel que pour toute base orthonormée directe de premier vecteur ,

Ainsi, est la rotation d’axe dirigé et orienté par et d’angle avec la réflexion par rapport au plan .

Définition : Soient de dimension . On appelle produit vectoriel de par , noté , l’unique élément de tel que :

Exemple :

Proposition : L’application produit vectoriel

est bilinéaire antisymétrique :

Proposition : Soient

1. est orthogonal à et , ie et .
2. La famille est libre si et seulement si .

Proposition : Soit une base orthonormée directe de . Pour , notons

Avec , alors

Proposition : Si est en base orthonormée directe de .

Alors

Proposition : Si est une famille orthonormée de , alors est une b.o.n directe de .

Exemple : Soit un ev euclidien orienté de dimension muni d’une base orthonormée directe

.

Déterminer la nature géométrique et les caractéristiques de tel que

On a , donc , et comme est une b.o.n de , .

De plus,

Donc

De plus, , donc est une rotation autour d’un axe

Soit , avec les .

Alors

Donc

De plus, car est une b.o.n de .

Donc on pose et on oriente l’axe par le vecteur .

Alors et on cherche (modulo ) l’angle de cette rotation.

On remarque que

Donc on peut poser de manière que soit orthonormée.

Alors est une b.o.n directe de

Ie

Et où

On a donc

Donc